第 3 节 a_n 与 S_n 混搭的处理（★★★）

内容提要

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 a_n 与 S_n 之间的关系为 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$，运用这一关系可以解决很多数列问题.

1．已知 S_n 求 a_n：若已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，则可直接由上述关系求得 a_n.

2．a_n 与 S_n 相互转化：题干给出一个 a_n 与 S_n 的关系，我们可利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$ 来消去 a_n 或 S_n，具体消谁由问题的需要来决定. 通常情况下，若让求的是 a_n，则消 S_n；若让求的是 S_n，则消 a_n.

3．前 n 项积：涉及前 n 项积的问题的处理方法与前 n 项和的类似. 设所有项非零的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 P_n，我们可利用 $a_n=\dfrac{P_n}{P_{n-1}}(n\ge 2)$ 来消去 a_n 或 P_n.

典型例题

类型Ⅰ：已知 S_n 求 a_n

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（已知 S_n 求 a_n，直接代关系式 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$ 计算即可，注意务必分 $n=1$ 和 $n\ge 2$ 分别计算）

由题意，$S_n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$，所以 $a_1=S_1=\dfrac{3^2-3}{2}=3$；

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}-\dfrac{3^n-3}{2}=\dfrac{3^{n+1}-3^n}{2}=\dfrac{3\times 3^n-3^n}{2}=3^n$；

又 $a_1=3$ 也满足上式，所以 $a_n=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

【反思】已知 S_n 求 a_n，直接代关系式 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$ 计算即可.

类型Ⅱ：a_n 与 S_n 的相互转化

【例 2】（2022·全国甲卷节选）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，证明：$\{a_n\}$ 是等差数列.

证明：（要证的是 $\{a_n\}$ 为等差数列，故考虑消 S_n，可把 S_n 的系数化为常数，再退 n 相减）

因为 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，所以 $2S_n+n^2=2na_n+n$ ①，故当 $n\ge 2$ 时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+n-1$ ②，

（两式相减即可把 $2S_n-2S_{n-1}$ 化为 $2a_n$，从而消去 S_n）

由①－②可得 $2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，

所以 $2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，整理得：$(n-1)a_n-(n-1)a_{n-1}=n-1$ ③，

因为$n\ge 2$，所以$n-1\ge 1$，故在③中约去$n-1$可得$a_n-a_{n-1}=1$，所以$\{a_n\}$是公差为1的等差数列.

【反思】当S_n与a_n混搭在一个关系式中时，若要证的是与a_n有关的结论，则考虑将关系式中S_n的系数化为常数，退n相减，由$S_n-S_{n-1}=a_n(n\ge 2)$消去S_n.

【例3】设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则$S_n=$______.

解析：要求的是S_n，故把条件中的a_{n+1}换成$S_{n+1}-S_n$，因为$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，所以$S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$ ①，

为了把递推式中S_nS_{n+1}分开，两端同除以S_nS_{n+1}，严谨考虑，先判断$\{S_n\}$是否各项均不为0，

由①可得$S_{n+1}(1-S_n)=S_n$，所以$S_2(1-S_1)=S_1$，又$S_1=a_1=-1<0$，所以$S_2=\dfrac{S_1}{1-S_1}<0$，

同理，由$S_2<0$得$S_3=\dfrac{S_2}{1-S_2}<0$，由$S_3<0$得$S_4=\dfrac{S_3}{1-S_3}<0$，…，所以$\{S_n\}$所有项均为负数，

在$S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$两端同除以S_nS_{n+1}得$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}=1$，所以$\dfrac{1}{S_{n+1}}-\dfrac{1}{S_n}=-1$，

故$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是公差为$-1$的等差数列，又$\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{a_1}=-1$，所以$\dfrac{1}{S_n}=-1+(n-1)\cdot(-1)=-n$，故$S_n=-\dfrac{1}{n}$.

答案：$-\dfrac{1}{n}$

【总结】当a_n和S_n混搭在一个关系式中时，常用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$来处理. 若要求的是a_n，则退n相减，消去S_n；若要求S_n，则常用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$代换a_n，得到数列$\{S_n\}$的递推公式.

类型III：前n项积的处理

【例4】（2021·全国乙卷）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积，已知$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$为等差数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（1）（b_n是$\{S_n\}$的前n项积，要证的是$\{b_n\}$为等差数列，故可由$S_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}(n\ge 2)$消去$S_n$）

因为b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积，所以当$n\ge 2$时，$S_n=\dfrac{S_1S_2\cdots S_{n-1}S_n}{S_1S_2\cdots S_{n-1}}=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$，

代入$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$得：$\dfrac{2}{\frac{b_n}{b_{n-1}}}+\dfrac{1}{b_n}=2$，整理得：$b_n-b_{n-1}=\dfrac{1}{2}$，故数列$\{b_n\}$是公差为$\dfrac{1}{2}$的等差数列.

（2）（要求a_n，可先由第（1）问证得的结果求出b_n，再代入$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$求$S_n$，进而得到$a_n$）

由题意，$b_1=S_1=a_1$，且在$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$中取$n=1$得：$\dfrac{2}{S_1}+\dfrac{1}{b_1}=2$，所以$b_1=S_1=a_1=\dfrac{3}{2}$，

结合（1）有 $b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2}$，代入 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 可求得 $S_n=\frac{n+2}{n+1}$，

（接下来就是已知 S_n 求 a_n 的问题了，a_1 已求出，只需由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 求出 $n\ge 2$ 时的结果即可）

所以当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$，故 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\-\frac{1}{n(n+1)},n\ge 2\end{cases}$.

【总结】涉及数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积 P_n 的数列问题，常通过 $a_n=\frac{P_n}{P_{n-1}}(n\ge 2)$ 来消去 a_n 或 P_n，其处理方法跟涉及通项与前 n 项和的问题类似.

类型Ⅳ：隐藏的前 n 项和

【例 5】已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$，若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots+2^{n-1}b_n=\frac{a_n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（所给等式左侧即为数列 $\{2^{n-1}b_n\}$ 的前 n 项和 T_n，故本题仍是已知前 n 项和求通项的问题）

设 $c_n=2^{n-1}b_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots+2^{n-1}b_n=\frac{a_n}{2}$ 即为 $T_n=\frac{a_n}{2}=\frac{n}{2}$，

所以 $c_1=T_1=\frac{1}{2}$；当 $n\ge 2$ 时，$c_n=T_n-T_{n-1}=\frac{n}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{1}{2}$；所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $c_n=\frac{1}{2}$，

从而 $2^{n-1}b_n=\frac{1}{2}$，故 $b_n=(\frac{1}{2})^n$，所以 $S_n=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^n$.

【变式】设数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，且对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=S_n^2$，其中 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（左侧是 $\{a_n^3\}$ 的前 n 项和，可退 n 相减，将左侧化简）

因为 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=S_n^2$，所以当 $n\ge 2$ 时，$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{n-1}^3=S_{n-1}^2$，两式相减可得：$a_n^3=S_n^2-S_{n-1}^2$，

（上式右侧为平方差结构，可分解因式，进一步化简）

所以 $a_n^3=(S_n+S_{n-1})(S_n-S_{n-1})=(S_n+S_{n-1})a_n$，因为 $a_n>0$，所以 $a_n^2=S_n+S_{n-1}$ ①，

（我们要求的是 a_n，所以在式①中再将 n 换成 $n+1$，作差消去与 S_n 有关的项）

由①可得 $a_{n+1}^2=S_{n+1}+S_n$，与式①作差可得：$a_{n+1}^2-a_n^2=S_{n+1}+S_n-S_n-S_{n-1}=(S_{n+1}-S_n)+(S_n-S_{n-1})=a_{n+1}+a_n$，

所以 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}+a_n$ ②，因为 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}+a_n>0$，故式②可化为 $a_{n+1}-a_n=1$ ③，

（注意前面我们退 n 得到 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{n-1}^3=S_{n-1}^2$ 时，要求 $n\ge 2$，所以式③也只在 $n\ge 2$ 时成立，$n=1$ 是否成立，需另外判断，可求出 a_1 和 a_2 来看）

在 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=S_n^2$ 中取 $n=1$ 可得 $a_1^3=S_1^2$，所以 $a_1^3=a_1^2$，结合 $a_1>0$ 可得 $a_1=1$，

在 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=S_n^2$ 中取 $n=2$ 可得 $a_1^3+a_2^3=S_2^2=(a_1+a_2)^2$，将 $a_1=1$ 代入可得：$1+a_2^3=(1+a_2)^2$，所以 $(1+a_2)(1-a_2+a_2^2)=(1+a_2)^2$，故 $1-a_2+a_2^2=1+a_2$，结合 $a_2>0$ 可得 $a_2=2$，所以 $a_2-a_1=1$，从而式③对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，故 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，所以 $a_n=1+(n-1)\times1=n$.

【总结】遇到例 5 及变式这种由 a_n 衍生的新数列的和式结构，同样可以考虑通过退 n 相减，把和式化掉.

强化训练

1.（2023 • 广州模拟 • ★）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2+n+1$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$______.

2.（2023 • 全国甲卷 • ★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$2S_n=na_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

3.（2022 • 新高考 I 卷 • ★★★）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

4.（2023 • 桂林模拟 • ★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-2^n$.

（1）证明：数列 $\left\{\dfrac{S_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列；

（2）若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$(n-6)a_n\ge\lambda\cdot2^n$，求 λ 的最大值.

5．（2022 • 成都七中模拟 • ★★★）已知数列$\{a_n\}$为非零数列，且满足$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_n})=(\frac{1}{2})^{n(n+1)}$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\frac{1}{a_n}+n\right\}$的前$n$项和$S_n$．

6．（2023 •湖南长沙模拟 •★★★）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)S_n+2n$．

（1）求a_1，a_2，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\frac{n}{a_n^2}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．